Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique.
Mathématiques. Option A

Partie I. Etude des espaces $E_n(a)$

1) a) Soient $f \in E$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet en a un développement limité d'ordre n, son développement de Taylor-Young :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité,

$$f \in E_n(a) \Leftrightarrow f(x) - f(a) \underset{x \to a}{=} o\left((x-a)^n\right) \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ f^{(k)}(a) = 0.$$

b) La somme d'une série entière de rayon infini est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc un élément de E. De plus, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{s^{(n)}(0)}{n!}$. D'après la question précédente,

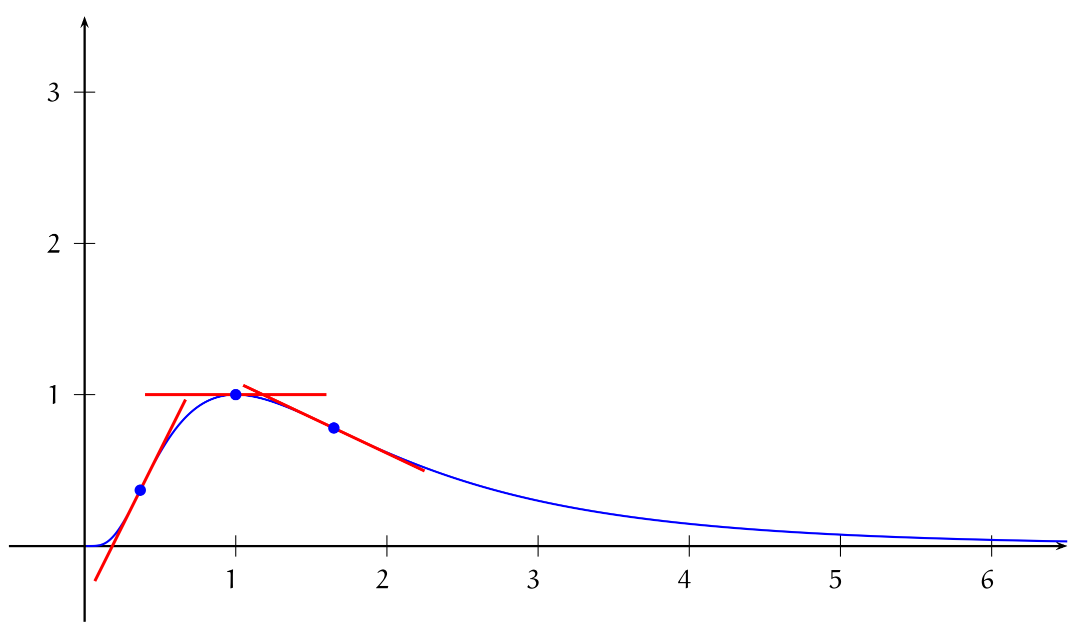
$$\begin{aligned} s \text{ ultraplate en } 0 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ s \in E_n(0) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{s^{(k)}(0)}{k!} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ s(x) = a_0 \Leftrightarrow s \text{ est constante sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) a) La fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$ et donc la fonction b est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. La fonction b admet un maximum en 1 égal à $b(1) = 1$. La fonction b est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $b'(x) = -\dfrac{2\ln x}{x} e^{-(\ln x)^2}$ puis

$$b''(x) = \left(\left(-\frac{2\ln x}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)\right) e^{-(\ln x)^2} = \frac{2}{x^2}\left(2\ln^2 x + \ln x - 1\right) e^{-(\ln x)^2}.$$

Pour $x > 0$, $b''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln^2 x + \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x \in \left\{-1, \dfrac{1}{2}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{e^{-1}, e^{1/2}\right\}$. De plus, en e^{-1} et en $e^{1/2}$, b'' s'annule en changeant de signe. Donc, le graphe de b admet deux points d'inflexion à savoir les points $\left(e^{-1}, e^{-1}\right)$ et $\left(e^{1/2}, e^{-1/4}\right)$.

Graphe de la fonction b.



b) La fonction $f : x \mapsto \ln x$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction $g : y \mapsto -y^2$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $h : z \mapsto e^z$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $b = h \circ g \circ f$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x > 0$,

$$b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n} e^{-(\ln x)^2}.$$

- D'après la question précédente, le résultat est vrai pour $n = 1$ avec $B_1 = -2X \in \mathbb{R}[X]$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons le résultat pour n. Alors, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} b^{(n+1)}(x) &= \left(\frac{(B_n'(\ln x))/x}{x^n} - n\frac{B_n(\ln x)}{x^{n+1}} + \frac{B_n(\ln x)}{x^n}\left(-2\frac{\ln x}{x}\right)\right) e^{-(\ln x)^2} \\ &= \frac{B_n'(\ln x) - (n + 2\ln x)B_n(\ln x)}{x^{n+1}} e^{-(\ln x)^2} = \frac{B_{n+1}(\ln x)}{x^{n+1}} e^{-(\ln x)^2}. \end{aligned}$$

  avec $B_{n+1} = B_n' - (2X + n)B_n \in \mathbb{R}[X]$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x > 0$,

$$b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n} e^{-(\ln x)^2}.$$

c) Par parité, la fonction c est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, c est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $c^{(n)}(0) = 0$.

- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} c(x) = \lim_{x\to 0} e^{-(\ln x)^2} = \lim_{X\to -\infty} e^X = 0 = c(0)$. Le résultat est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons le résultat pour n. D'après un théorème de croissances comparées,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} c^{(n+1)}(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{B_{n+1}(\ln|x|)}{x^{n+1}} e^{-(\ln|x|)^2} = \lim_{X\to -\infty} \frac{B_{n+1}\left(-\sqrt{-X}\right)}{\left(\pm e^{-\sqrt{-X}}\right)^{n+1}} e^X \\ &= \lim_{X\to -\infty} \pm B_{n+1}\left(-\sqrt{-X}\right) e^{X+(n+1)\sqrt{-X}} = 0. \end{aligned}$$

  Ainsi, $c \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap C^{n+1}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et $c^{(n+1)} = \left(c^{(n)}\right)'$ a une limite réelle en 0 à savoir 0. D'après le théorème de la limite de la dérivée, c est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et en particulier $n + 1$ fois dérivable en 0 avec $c^{(n+1)}(0) = 0$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, c est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $c^{(n)}(0) = 0$.

Ainsi, la fonction c est un élément de E, ultraplate en 0.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Si c est plate en a, alors $c'(a) = 0$ puis $b'(|a|) = 0$ puis $a \in \{-1, 1\}$. Réciproquement, si $a \in \{-1, 1\}$, c' s'annule en a et c'' ne s'annule pas en a d'après la question a). Donc, la fonction c est plate en 1 et -1 à l'ordre 1 et n'est plate en aucun autre réel de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

3) a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. La fonction constante 1 est un élément de $E_n(a)$ d'après la question 1.b). Ensuite, si f et g sont deux éléments de $E_n(a)$ et (λ, μ) est un couple de réels,

$$(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a) = \lambda(f(x) - f(a)) + \mu(g(x) - g(a)) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$$

et donc $\lambda f + \mu g$ est un élément de $E_n(a)$. De même,

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) \underset{x\to a}{=} (f(a) + o((x-a)^n))(g(a) + o((x-a)^n)) - f(a)g(a) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$$

et donc fg est un élément de $E_n(a)$. Ceci montre que $E_n(a)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $(E, +, ., \times)$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto 1 + (x-a)^{n+1}$ est dans $E_n(a)$. Soit $g : 1 + (x - a)$. $f(a)g(a) = 1$ puis

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = \left(1 + (x-a)^{n+1}\right)(1 + (x-a)) - 1 = (x-a) + (x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+2} \underset{x\to a}{\sim} x - a,$$

et donc $fg \notin E_n(a)$. Par suite, $E_n(a)$ n'est jamais un idéal de l'anneau E.

4) a) Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0, ultraplate en 0. Soit a un réel non nul. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = f(x-a)$. g est définie sur un voisinage de a et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g(x) = f(x-a) \underset{x \to a}{=} o\left((x-a)^n\right).$$

Donc, g est ultraplate en a.

b) Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $d(x) = c(x-1)c(x)c(x+1)$. d est une fonction élément de E qui est ultraplate en -1, 0 et 1 d'après la question 4.a) (et car de plus $d(-1) = d(0) = d(1) = 0$).

Partie II. Interpolations polynomiales avec ajustement des dérivées

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si P_n est un élément de $\mathbb{R}_{n+2}[X]$ tel que $P_n(0) = 0$ et $P_n \in E_n(a)$, alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P^{(k)}(0) = 0$ puis 0 est racine de P_n d'ordre au moins $n+1$. Donc, il existe deux réels a et b tels que $P_n = X^{n+1}(aX+b)$. Puis

$$\begin{aligned}
P_n(1) = 1 \text{ et } P_n \in E_1(1) &\Rightarrow P_n(1) = 1 \text{ et } P_n'(1) = 0 \Rightarrow a+b = 1 \text{ et } (n+1)(a+b)+a = 0 \\
&\Rightarrow a = -(n+1) \text{ et } b = n+2 \\
&\Rightarrow P_n = X^{n+1}(-(n+1)X+(n+2)).
\end{aligned}$$

Réciproquement, si $P_n = X^{n+1}(-(n+1)X+(n+2))$, alors $P_n(0) = 0$, $P_n(x) - P_n(0) = P_n(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$, $P_n(1) = 1$ et $P_n'(1) = 0$ de sorte que $P_n(x) - P_n(1) \underset{x \to 1}{=} o(x-1)$. Donc, P_n convient.

b) Soit $x \in [0,1]$.

- Si $x = 1$, $P_n(x) = 1 \underset{n \to +\infty}{\to} 1$.
- Si $x \in [0,1[$, $P_n(x) = x^{n+1}(-(n+1)x+(n+2)) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ d'après un théorème de croissances comparées.

Donc, la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x \in [0,1[\end{cases}$.

Puisque chaque fonction P_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue sur $[0,1]$ et que la fonction limite f n'est pas continue sur $[0,1]$ car discontinue en 1, la convergence de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$ ne peut pas être uniforme. Donc, la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction f.

2) a) Soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda P + \mu Q) = &\Big(\lambda P^{(0)}(a_1) + \mu Q^{(0)}(a_1), \ldots, \lambda P^{(n_1)}(a_1) + \mu Q^{(n_1)}(a_1), \ldots, \\
&\lambda P^{(0)}(a_p) + \mu Q^{(0)}(a_p), \ldots, \lambda P^{(n_p)}(a_p) + \mu Q^{(n_p)}(a_p)\Big) \\
&= \lambda \left(P^{(0)}(a_1), \ldots, P^{(n_1)}(a_1), \ldots, P^{(0)}(a_p), \ldots, P^{(n_p)}(a_p)\right) \\
&+ \mu \left(Q^{(0)}(a_1), \ldots, Q^{(n_1)}(a_1), \ldots, Q^{(0)}(a_p), \ldots, Q^{(n_p)}(a_p)\right) \\
&= \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q).
\end{aligned}$$

Donc, $\Phi \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}[X], \mathbb{R}^{m+1}\right)$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in \mathrm{Ker}(\Phi) &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,p]\!],\ \forall i \in [\![0,n_k]\!],\ P^{(i)}(a_k) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,p]\!],\ a_k \text{ racine de } P \text{ d'ordre au moins } n_k+1 \\
&\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X] /\ P = Q\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}.
\end{aligned}$$

Donc, si on pose $A = \prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}$, alors $\mathrm{Ker}(\Phi) = A\mathbb{K}[X]$. On note que $\deg(A) = \sum_{k=1}^{p}(n_k+1) = p + \sum_{k=1}^{p} n_k = m+1$.

Vérifions alors que $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_m[X] \oplus \mathrm{Ker}(\Phi)$.

• Soit $P \in \mathbb{R}_m[X] \cap \operatorname{Ker}(\Phi)$. Donc, $\deg(P) \leqslant m$ et il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QA$. Si $Q \neq 0$, $\deg(P) = \deg(Q) + \deg(A) \geqslant \deg(A) = m+1$ ce qui est faux. Donc, $Q = 0$ puis $P = 0$. Ceci montre que $\mathbb{R}_m[X] \cap \operatorname{Ker}(\Phi) \subset \{0\}$ puis que $\mathbb{R}_m[X] \cap \operatorname{Ker}(\Phi) = \{0\}$.

• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La division euclidienne de P par A fournit deux polynômes Q et R tels que $P = AQ + R$ et $\deg(R) \leqslant \deg(A) - 1 = m$. Le polynôme AQ est dans $\operatorname{Ker}(\Phi)$ et le polynôme R est dans $\mathbb{R}_m[X]$. On a montré que tout élément de $\mathbb{R}[X]$ est somme d'un élément de $\mathbb{R}_m[X]$ et d'un élément de $\operatorname{Ker}(\Phi)$ et donc que $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_m[X] + \operatorname{Ker}(\Phi)$.

Finalement, $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_m[X] \oplus \operatorname{Ker}(\Phi)$.

b) On en déduit que la restriction Φ_m de Φ à $\mathbb{R}_m[X]$ est une application linéaire injective sur $\mathbb{R}_m[X]$ et donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$ sur $\mathbb{R}^{m+1}$ car $\dim(\mathbb{R}_m[X]) = \dim\left(\mathbb{R}^{m+1}\right) = m+1 < +\infty$.

Maintenant, si P est un élément de $\mathbb{R}_m[X]$,

$$\begin{aligned}
P \in \bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k) &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,p]\!],\ a_k \text{ racine d'ordre au moins } n_k \text{ de } P - P(a_k) \\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,p]\!],\ \forall i \in [\![1,n_k]\!],\ P^{(i)}(a_k) = 0.
\end{aligned}$$

Soit alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ et $P \in \mathbb{R}_m[X]$.

$$P \in \bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k) \text{ et } \forall k \in [\![1,p]\!],\ P(a_k) = \alpha_k \Leftrightarrow \Phi_m(P) = (\alpha_1, \underbrace{0,\ldots,0}_{n_1}, \ldots, \alpha_p, \underbrace{0,\ldots,0}_{n_p}).$$

Puisque Φ_m est un isomorphisme, il existe un et un seul tel polynôme.

3) a) Ici, $m = (3-1) + n + 1 + 1 = n + 4$. D'après la question précédente, il existe un polynôme H_n et un seul, élément de $\mathbb{R}_{n+4}[X]$ tel que $H_n \in E_n(0) \cap E_1(1) \cap E_1(-1)$ et $H_n(0) = 0$ et $H_n(1) = H_n(-1) = 1$.
Le polynôme $H_n(-X)$ vérifie exactement les mêmes conditions et donc, par unicité, $H_n(-X) = H_n(X)$ ou encore, le polynôme H_n est pair.

b) Nécessairement, puisque $H_n(0) = 0$, que $H_n \in E_n(0)$ et que $\deg(X_n) \leqslant n + 4$, il existe quatre réels a, b c et d tels que $H_n = X^{n+1}\left(aX^3 + bX^2 + cX + d\right)$. H_n doit être pair.

• Supposons n pair. Posons $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$. $X^{n+1} = X^{2p+1}$ étant un polynôme impair, il doit en être de même du polynôme $aX^3 + bX^2 + cX + d$. Donc, $b = d = 0$.
La condition $H_{2p}(1) = 1$ fournit $a + c = 1$ et donc $H_{2p} = X^{2p+1}\left(aX^3 + (1-a)X\right)$. Mais alors

$$H'_{2p} = (2p+1)X^{2p}\left(aX^3 + (1-a)X\right) + X^{2p+1}\left(3aX^2 + 1 - a\right)$$

puis

$$H'_{2p}(1) = 0 \Leftrightarrow (2p+1) + (3a + 1 - a) = 0 \Leftrightarrow a = -(p+1).$$

Donc,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ H_{2p} = X^{2p+1}\left(-(p+1)X^3 + (p+2)X\right) = X^{2p+2}\left(-(p+1)X^2 + (p+2)\right).$$

• Supposons n impair. Posons $n = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$. $X^{n+1} = X^{2p+2}$ étant un polynôme pair, il doit en être de même du polynôme $aX^3 + bX^2 + cX + d$. Donc, $a = c = 0$.
La condition $H_{2p+1}(1) = 1$ fournit $b + d = 1$ et donc $H_{2p+1} = X^{2p+2}\left(bX^2 + (1-b)\right)$. Mais alors

$$H'_{2p+1} = (2p+2)X^{2p+1}\left(bX^2 + (1-b)\right) + X^{2p+2}(2bX)$$

puis

$$H'_{2p+1}(1) = 0 \Leftrightarrow (2p+2) + 2b = 0 \Leftrightarrow b = -(p+1).$$

Donc,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ H_{2p+1} = X^{2p+2}\left(-(p+1)X^2 + (p+2)\right).$$

On note que $H_{2p+1} = H_{2p}$.

c) Soit $x \in]-1,1[$. D'après un théorème de croissances comparées,

$$H_{2p}(x) = x^{2p+2}\left(-(p+1)x^2 + (p+2)\right) \underset{p \to +\infty}{\to} 0 \text{ et } H_{2p+1}(x) = x^{2p+2}\left(-(p+1)x^2 + (p+2)\right) \underset{p \to +\infty}{\to} 0.$$

Donc, $H_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Ainsi, la suite de fonctions $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]-1,1[$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Posons $x_p = \sqrt{1-\dfrac{1}{p+1}} \in]-1,1[$.

$$\begin{aligned} H_{2p}(x_p) &= \left(1-\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}\left(-(p+1)\left(1-\frac{1}{p+1}\right)+(p+2)\right) = 2\left(\frac{p}{p+1}\right)^{p+1} \\ &= 2\left(\frac{p+1}{p}\right)^{-(p+1)} = 2\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-(p+1)} = 2e^{-(p+1)\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)} \\ &\underset{p\to+\infty}{=} 2e^{-(p+1)\left(\frac{1}{p}+o\left(\frac{1}{p}\right)\right)} \underset{p\to+\infty}{=} 2e^{-1+o(1)}. \end{aligned}$$

Donc, $H_{2p}(x_p) \underset{p\to+\infty}{\to} \dfrac{2}{e}$ et en particulier, $H_{2p}(x_p)$ ne tend pas vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Ceci montre que la suite de fonctions $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]-1,1[$.

Partie III. Fonctions génératrices plates en 0

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. G_X est plate à l'ordre n en 0 si et seulement si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(X=k)=0$ et $P(X=n+1)\neq 0$. Ceci est équivalent au fait que pour tout x réel de $[0,n+1[$, $P(X\leqslant x)=P(X=0)$ et $P(X\leqslant n+1) > P(X=0)$.
En résumé, G_X est plate à l'ordre n en 0 si et seulement si la fonction de répartition de X est constante sur $[0,n+1[$ et pas sur $[0,n+1]$.

b) D'après la question 1.b) de la partie I, G_X est ultraplate en 0 si et seulement si $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(X=k)=0$. Ceci équivaut $P(X=0)=1$.

2) a) La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence. Donc, ici G_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En particulier, G_X est dérivable à tout ordre en 1 et on sait alors que la variable aléatoire X admet un moment à n'importe quel ordre.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons S plate à l'ordre n en 0. Donc, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $P(X=k)=0$ et $P(X=n+1)\neq 0$ puis

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k) \geqslant (n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k) = (n+1)\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = (n+1).$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si pour tout $k\geqslant n+2$, $P(X=k)=0$ ce qui équivaut à $P(X=n+1)=1$.

3) a) Soit $m=[c]+1$ (où $[\ ]$ désigne la partie entière). c est un élément de $]n+1,m[$. Donc il existe $\lambda\in]0,1[$ tel que $c=(1-\lambda)(n+1)+\lambda m$ (à savoir $\lambda=\dfrac{c-(n+1)}{m-(n+1)}$). Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tel que $P(X=n+1)=1-\lambda$, $P(X=m)=\lambda$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*\setminus\{n+1,m\}$, $P(X=k)=0$. G_X est dans $E_n(0)$ et

$$E(X) = (n+1)P(X=n+1)+mP(X=m) = (1-\lambda)(n+1)+\lambda m = c.$$

b) Par hypothèse, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $P(X=k)=0$ et $c=G_X'(1)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k)=E(X)$. D'après le théorème de transfert, $G_X''(1)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k(k-1)P(X=k)=E(X(X-1))$ puis

$$G_X''(1)-c(c-1) = E(X(X-1))-E(X)(E(X)-1) = E\left(X^2\right)-(E(X))^2 = E\left((X-E(X))^2\right)\geqslant 0,$$

et donc $G_X''(1)\geqslant c(c-1)$.

c)

$$\begin{aligned} G_X''(1)=c(c-1) &\Rightarrow E\left((X-E(X))^2\right)=0 \Rightarrow E((X-c)^2)=0 \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty}(k-c)^2P(X=k)=0 \\ &\Rightarrow \forall k\geqslant n+1,\ (k-c)^2P(X=k)=0 \\ &\Rightarrow \exists k\geqslant n+1/\ c=k \text{ (car l'une au moins des probabilités } P(X=k) \text{ n'est pas nulle)} \\ &\Rightarrow c\in\mathbb{N} \text{ (et } c>n+1). \end{aligned}$$

Donc, si $G_X''(1)=c(c-1)$, c est nécessairement un entier.

Supposons maintenant que $c \notin \mathbb{N}$ (et $c > n+1$).

Partie IV. Approximations polynomiales

1) a) Soit $G = \{f \in F/\ f(0) = 0\}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G convergeant uniformément sur $[-1,1]$ vers une certaine fonction f appartenant à F. En particulier, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers la fonction f et en particulier, $f(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Donc, $f \in G$.

Ainsi, toute suite convergente d'éléments de G converge dans G et donc G est un fermé de F.

b) Soit $H = \{f \in F/\ f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)\}$. (L'indication fournie est mauvaise car la suite de fonctions proposée converge simplement sur $[-1,1]$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto |x|$ qui n'est pas de classe C^∞ sur $[-1,1]$).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$, posons $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$. Chaque f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^∞ sur $[-1,1]$ et vérifie $f_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} nx^3$ et en particulier, $f_n(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$. Donc, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de H.
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto x$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx^3}{1+nx^2} - x\right| = \frac{|x|}{1+nx^2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [-1,1]$, posons $g_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$. g_n est impaire. Pour $x \in [-1,1]$,

$$g_n'(x) = \frac{(1+nx^2) - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}.$$

g_n est positive sur $[0,1]$, impaire, croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et décroissante $\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}, 1\right]$. Donc, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$|g_n(x)| \leqslant g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-1,1]$ et de plus, f est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite d'éléments de H qui converge uniformément sur $[-1,1]$ vers un élément f de F. Mais, f n'est pas négligeable devant x quand x tend vers 0 et f n'est donc pas un élément de H. Ceci montre que H n'est pas un fermé de F.

2) a) Soit $f \in F$. f est continue sur $[-1,1]$ et donc $T(f)$ est définie et de classe C^1 sur $[-1,1]$ puis $(T(f))' = f$. Mais alors, $T(f)$ est de classe C^∞ sur $[-1,1]$ ou encore $T(f) \in F$. Ceci montre que T est une application de F dans F.

Soient $(f,g) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout x de $[-1,1]$,

$$T(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x (\lambda f + \mu g)(t)\ dt = \lambda \int_0^x f(t)\ dt + \mu \int_0^x g(t)\ dt = (\lambda T(f) + \mu T(g))(x),$$

et donc $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$. On a montré que T est un endomorphisme de F.

On sait alors que pour montrer la continuité de T, il suffit de fournir un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout f de F, $\|T(f)\| \leqslant k\|f\|$.
Soit $f \in F$. Pour tout x de $[0,1]$,

$$|Tf(x)| = \left|\int_0^x f(t)\ dt\right| \leqslant \int_0^x |f(t)|\ dt \leqslant \int_0^x \|f\|\ dt = x\|f\| \leqslant \|f\|.$$

De même, si $x \in [-1,0]$,

$$|Tf(x)| \leqslant \int_x^0 |f(t)|\ dt \leqslant -x\|f\| \leqslant \|f\|.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-1,1]$, $|Tf(x)| \leqslant \|f\|$ et finalement, $\|T(f)\| \leqslant \|f\|$.

On a montré que pour tout $f \in F$, $\|T(f)\| \leqslant \|f\|$ et donc, T est continue sur l'espace vectoriel normé $(F, \|\ \|)$.

b) Soient $f \in F$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $T^n(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $(T^n(f))' = T^{n-1}(f)$ puis par récurrence, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $(T^n(f))^{(k)} = T^{n-k}(f)$. En particulier, $(T^n(f))^{(n)} = f$. D'autre part, pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, $(T^n(f))^{(k)}(0) = T^{n-k}(0) = 0$ car $n - k > 0$. Donc, $T^n(f)$ est une fonction dont la dérivée n-ème est f et dont les dérivées d'ordre au plus $n-1$ s'annulent en 0.

Si g est une telle fonction, la dérivée n-ème de $T^n(f)-g$ est nulle et donc il existe un polynôme P de degré au plus $n-1$ tel que $T^n(f)-g=P$. Les dérivées successives de P en 0 jusqu'à l'ordre $n-1$, sont nulles et donc tous les coefficients de P sont nuls ($\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $a_k=\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}=0$) et donc $P=0$ puis $g=T^n(f)$. Ceci montre $T^n(f)$ est l'unique solution du problème posé.

c) Soit $f\in F$.

$$\begin{aligned}
f\in \mathrm{Ker}(T) &\Rightarrow \forall x\in[-1,1],\ \int_0^x f(t)\ dt=0\\
&\Rightarrow \forall x\in[-1,1],\ f(x)=0 \text{ (en dérivant l'égalité précédente)}\\
&\Rightarrow f=0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$ puis T est injective.

Un élément de $\mathrm{Im}(T)$ s'annule en 0 et donc par exemple, la fonction $x\mapsto 1$ est un élément de F qui n'appartient pas à $\mathrm{Im}(T)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(T)\neq F$ et donc T n'est pas surjective.

3) a) $f^{(k+3)}$ est une fonction continue sur le segment $[-1,1]$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers la fonction $f^{(k+3)}$ sur $[-1,1]$.

b) T est continue sur l'espace vectoriel normé $(F,\|\ \|)$ et donc, T^{k+3} est continue sur cet espace.
Puisque la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f^{(k+3)}$ dans l'espace vectoriel normé $(F,\|\ \|)$ et que T^{k+3} est continue sur cet espace, la suite $\left(T^{k+3}(P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $T^{k+3}\left(f^{(k+3)}\right)$ dans cet espace ou encore la suite de fonctions $\left(T^{k+3}(P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $T^{k+3}\left(f^{(k+3)}\right)$ sur $[-1,1]$.
Maintenant, $\left(T^{k+3}\left(f^{(k+3)}\right)\right)^{(k+3)}=f^{(k+3)}$ et donc il existe un polynôme R de degré inférieur ou égal à $k+2$ tel que $T^{k+3}\left(f^{(k+3)}\right)=f+R$.

Finalement, la suite $\left(T^{k+3}(P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers une fonction de la forme $f+R$ où R est un polynôme de degré au plus $k+2$.

c) Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $R_n=T^{k+3}(P_n)-R$.

• La suite de polynômes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-1,1]$.

• La suite de polynômes $\left(T^{k+3}(P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément et donc simplement vers $f+R$ sur $[-1,1]$. En particulier, $f(0)+R(0)=\lim\limits_{n\to+\infty}T^{k+3}(P_n)(0)=0$ et donc $R(0)=-f(0)$ puis pour tout $n\in\mathbb{N}$, $R_n(0)=T^{k+3}(P_n)(0)-R(0)=f(0)$.

• La suite de polynômes $\left(T^{k+3}(P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $f+R$ sur $[-1,1]$ et pour tout $i\in[\![1,k+2]\!]$, la suite $\left(\left(T^{k+3}(P_n)\right)^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}=\left(T^{k+3-i}(P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ (car $k+3-i\geqslant 0$ et par continuité de T^{k+3-i} sur $(F,\|\ \|)$).
On sait alors que pour tout $i\in[\![1,k+2]\!]$, la suite $\left(\left(T^{k+3}(P_n)\right)^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}=\left(T^{k+3-i}(P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $(f+R)^{(i)}$.
Par suite,

$$R^{(i)}(0)=\lim_{n\to+\infty}T^{k+3-i}(P_n)(0)-f^{(i)}(0)=-f^{(i)}(0)$$

et en particulier, $R=-f(0)-\dfrac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}X^{k+1}-\dfrac{f^{(k+2)}(0)}{(k+2)!}X^{k+2}$.

Ensuite, pour $i\in[\![1,k]\!]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $R_n^{(i)}(0)=T^{k+3-i}(P_n)(0)-R^{(i)}(0)=0$. Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, R_n est plate en 0 à l'ordre k au moins. Ensuite, $R_n^{(k+1)}(0)=T^2(P_n)(0)-R^{(k+1)}(0)=f^{(k+1)}(0)\neq 0$ et donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, R_n est plate en 0 à l'ordre k (exactement).

• Il reste à corriger R_n pour obtenir un polynôme prenant en plus la même valeur que f en -1 et en 1 sans changer la valeur en 0, la caractère plat à l'ordre k en 0 et la convergence uniforme vers f sur $[-1,1]$.
Cherchons Q_n sous la forme $Q_n=R_n+X^{2k}\left(a_nX^2+b_nX\right)$ ($x^{2k}\left(a_nx^2+b_nx\right)\underset{x\to0}{=}o\left(x^{2k}\right)$ avec $2k\geqslant k+1$ avec $k\in\mathbb{N}^*$).

$$\left\{\begin{array}{l}Q_n(1)=f(1)\\ Q_n(-1)=f(-1)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a_n+b_n+R_n(1)=f(1)\\ a_n-b_n+R_n(-1)=f(-1)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a_n=\dfrac{1}{2}\left(f(1)-R_n(1)+f(-1)-R_n(-1)\right)\\ b_n=\dfrac{1}{2}\left(f(1)-R_n(1)-f(-1)+R_n(-1)\right)\end{array}\right.$$

Soit donc $Q_n=R_n+T_n$ où $T_n=\dfrac{1}{2}X^{2k}\left(\left(f(1)-R_n(1)+f(-1)-R_n(-1)\right)X^2+\left(f(1)-R_n(1)-f(-1)+R_n(-1)\right)X\right)$.

$Q_n(0) = R_n(0) = f(0)$, $Q_n(1) = f(1)$ et $Q_n(-1) = f(-1)$.
Pour $i \in [\![0, k+1]\!]$, $Q_n(x) \underset{x \to 0}{=} R_n(x) + o\left(x^{2k}\right) = f(0) + \dfrac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1} + o\left(x^{k+1}\right)$ et donc Q_n est plate à l'ordre k en 0.
Pour $x \in [-1, 1]$, $|T_n(x)| \leqslant |a_n| + |b_n| \leqslant \mathrm{Max}\{|R_n(1) - f(1)|, |R_n(-1) - f(-1)|\}$ et donc

$$\|T_n\| \leqslant \mathrm{Max}\{|R_n(1) - f(1)|, |R_n(-1) - f(-1)|\} \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Donc, la suite de fonctions (T_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-1, 1]$ puis la suite de fonctions (Q_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[-1, 1]$.

